II4031 Kriptografi dan Koding

Algoritma RSA

Oleh: Rinaldi Munir

Program Studi Sistem dan Teknologi Informasi
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
ITB

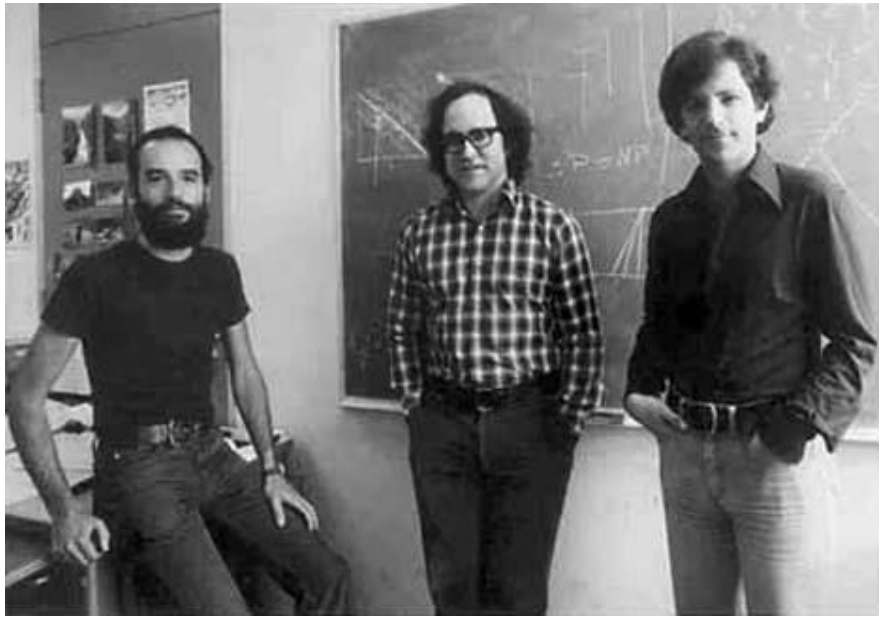
Pendahuluan

- RSA merupakan algoritma kunci-publik yang paling terkenal dan paling banyak aplikasinya.

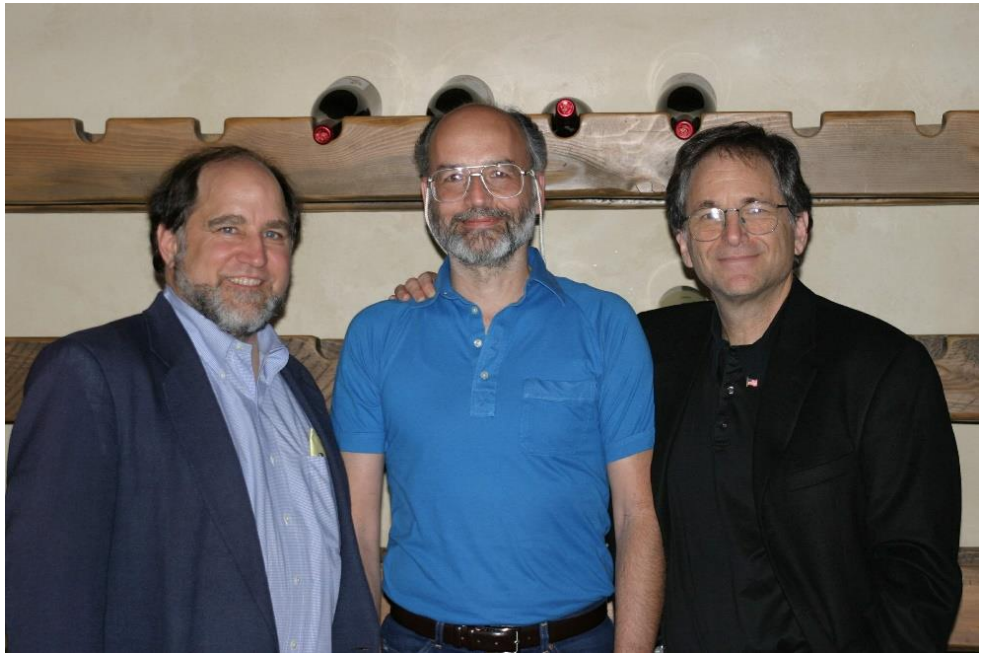
- Ditemukan oleh tiga peneliti dari *MIT* (*Massachussets Institute of Technology*), yaitu Ronald Rivest, Adi Shamir, dan Len Adleman, pada tahun 1976.
- RSA = Rivest-Shamir-Adleman

- Keamanan algoritma RSA terletak pada sulitnya memfaktorkan bilangan bulat yang besar menjadi faktor-faktor prima.

The authors of RSA: Rivest, Shamir and Adleman



dahulu



sekarang

Properti Algoritma RSA

1. p dan q bilangan prima (rahasia)
2. $n = p \cdot q$ (tidak rahasia)
3. $\phi(n) = (p - 1)(q - 1)$ (rahasia)
4. e (kunci enkripsi) (tidak rahasia)

   Syarat: PBB(e, $\phi(n)$) = 1 , PBB = pembagi bersama terbesar = *gcd*
5. d (kunci dekripsi) (rahasia)

   d dihitung dari $d \equiv e^{-1} \bmod (\phi(n))$
6. m (plainteks) (rahasia)
7. c (cipherteks) (tidak rahasia)

Penurunan Rumus RSA

- Prinsip: Teorema Euler $a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$
- Syarat:

  1. a harus relatif prima terhadap n
  2. $\phi(n)$ = Toitent Euler = fungsi yang menentukan berapa banyak dari bilangan-bilangan 1, 2, 3, …, n yang relatif prima terhadap n.

     Contoh: $\phi(20) = 8$, sebab terdapat 8 buah yang relatif prima dengan 20, yaitu 1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19.

Jika $n = pq$ adalah bilangan komposit dengan p dan q prima, maka

$$\phi(n) = \phi(p)\,\phi(q) = (p-1)(q-1).$$

$a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$

$\downarrow$ (pangkatkan kedua ruas dengan k)

$a^{k\phi(n)} \equiv 1^{k} \pmod{n}$

$\downarrow$

$a^{k\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$

$\downarrow$ (ganti a dengan m)

$m^{k\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$

$\downarrow$ (kalikan kedua ruas dengan m)

$m^{k\phi(n)+1} \equiv m \pmod{n}$

- Misalkan e dan d dipilih sedemikian sehingga

  $$e \cdot d \equiv 1 \pmod{\phi(n)}$$

  atau

  $$e \cdot d = k\phi(n) + 1$$

  Maka

  $$m^{k\phi(n)+1} \equiv m \pmod{n}$$

  $$\downarrow$$

  $$m^{e \cdot d} \equiv m \pmod{n} \rightarrow \qquad (m^e)^d \equiv m \pmod{n}$$

- Enkripsi: $E_e(m) = c = m^e \bmod n$
- Dekripsi: $D_d(c) = m = c^d \bmod n$

Prosedur Pembangkitan Sepasang Kunci

1. Pilih dua bilangan prima, p dan q
2. Hitung $n = pq$.
3. Hitung $\phi(n) = (p - 1)(q - 1)$.
4. Pilih sebuah bilangan bulat e sebagai kunci publik, e harus relatif prima terhadap $\phi(n)$.
5. Hitung kunci dekripsi, d, dengan persamaaan

   $ed \equiv 1$ (**mod** $\phi(n)$) atau $d \equiv e^{-1} \mod (\phi(n))$

Hasil dari algoritma di atas:

- Kunci publik adalah pasangan (e, n)
- Kunci privat adalah pasangan (d, n)

Enkripsi

1. Nyatakan pesan menjadi blok-blok plainteks: m_1, m_2, m_3, …

   (syarat: $0 \leq m_i < n - 1$)

2. Hitung blok cipherteks c_i untuk blok plainteks m_i menggunakan kunci publik e dengan persamaan

   $$c_i = m_i^e \textbf{ mod } n$$

Dekripsi

1. Misalkan blok-blok cipherteks adalah c_1, c_2, c_3, …

2. Hitung kembali blok plainteks m_i dari blok cipherteks c_i menggunakan kunci privat d dengan persamaan

$$m_i = c_i^d \textbf{ mod } n,$$

Contoh pembangkitan kunci oleh Alice

- Misalkan Alice memilih $p = 47$ dan $q = 71$ (keduanya prima), maka dapat dihitung:

  $n = p \times q = 3337$

  $\phi(n) = (p - 1) \times (q - 1) = 3220.$

- Alice memilih kunci publik $e = 79$ (yang relatif prima dengan 3220 karena pembagi bersama terbesarnya adalah 1).

- Nilai e dan n dapat dipublikasikan ke umum.

- Selanjutnya Alice menghitung kunci privat *d* dengan kekongruenan:

$$ed \equiv 1 \pmod{\phi(n)}$$

d adalah balikan *e* dalam modulus $\phi(n)$

d dapat dihitung dengan algoritma Euclidean atau dengan rumus:

$$d = \frac{1 + k\phi(n)}{e}$$

Dengan mencoba nilai-nilai k = 1, 2, 3, …, diperoleh nilai *d* yang bulat adalah 1019. Ini adalah kunci privat (untuk dekripsi).

- Misalkan Bob akan mengirim plainteks M = ‘HELLO ALICE’ kepada Alice

- Dengan memisalkan A = 00, B = 01, …, Z = 25, maka pesan m dikodekan ke dalam *integer* (spasi diabaikan) menjadi

M = 07041111140011080204

Pecah M menjadi blok yang 4 digit:

m_1 = 0704 m_4 = 1108

m_2 = 1111 m_5 = 0204

m_3 = 1400

(Perhatikan, m_i masih terletak di dalam selang [0, 3337 – 1]

- Bob mengenkripsi setiap blok dengan menggunakan kunci public Alice (e = 79):

$c_1 = 704^{79} \bmod 3337 = 328$;

$c_2 = 1111^{79} \bmod 3337 = 301$;

$c_3 = 1400^{79} \bmod 3337 = 2653$;

$c_4 = 1108^{79} \bmod 3337 = 2986$;

$c_5 = 204^{79} \bmod 3337 = 1164$;

Cipherteks: C = 0328 0301 2653 2986 1164

.

- Bob mengirim cipherteks C kepada Alice

- Alice mendekripsi cipherteks dengan menggunakan kunci privatnya, yaitu d = 1019

  $m_1 = 328^{1019} \bmod 3337 = 704 = 0704$

  $m_2 = 301^{1019} \bmod 3337 = 1111$

  $m_3 = 2653^{1019} \bmod 3337 = 1400$

  $m_4 = 2986^{1019} \bmod 3337 = 1108$

  $m_5 = 1164^{1019} \bmod 3337 = 204$

- Alice memperoleh kembali plainteks dari Bob

  M = 0704111114001108 0204

  yang dikodekan kembali menjadi

  M = HELLO ALICE

Keamanan RSA

- Keamanan algoritma *RSA* terletak pada tingkat kesulitan dalam memfaktorkan bilangan bulat n faktor-faktor prima (p dan q), yang dalam hal ini $n = p \times q$.

- Sekali n berhasil difaktorkan menjadi p dan q, maka

  $\phi(n) = (p - 1)\times(q - 1)$ dapat dihitung.

  Selanjutnya, karena kunci enkripsi e diumumkan (tidak rahasia), maka kunci dekripsi d dapat dihitung dari kekongruenen

  $ed \equiv 1 \pmod{\phi(n)}$.

- Penemu algoritma *RSA* menyarankan nilai *p* dan *q* panjangnya lebih dari 100 digit. Dengan demikian hasil kali $n = p \times q$ akan berukuran lebih dari 200 digit.

- Usaha untuk mencari faktor bilangan 200 digit membutuhkan waktu komputasi selama 4 milyar tahun, sedangkan untuk bilangan 500 digit membutuhkan waktu 10^{25} tahun

  (dengan asumsi bahwa algoritma pemfaktoran yang digunakan adalah algoritma yang tercepat saat ini dan komputer yang dipakai mempunyai kecepatan 1 milidetik).

- Algoritma pemfaktoran yang tercepat saat ini memiliki kompleksitas

$$O(\exp(\sqrt[3]{\frac{64}{9}b(\log(b)^2)}))$$

  untuk bilangan bulat *n* sepanjang b-bit.

- Hingga saat ini belum ditemukan algoritma pemfaktoran bilangan bulat besar dalam waktu polinomial.

- Fakta inilah yang membuat algoritma *RSA* dianggap masih aman untuk saat ini. Semakin panjang bilangan bulatnya, maka semakin lama waktu yang dibutuhkan untuk memfaktorkannya.

Contoh parameter RSA

- Modulus *n* sepanjang 1024 bit (setara 300 angka decimal
- Bilangan prima *p* dan *q* masing-masing panjangnya sekitar 154 angka decimal
- Sumber: https://www.di-mgt.com.au/rsa_alg.html

- n =
  11929413484016950905552721133125564964460656966152763801206748195494305685115033380631595703771562029730500011862877084668996911289221224545711806057499598951708004210526342737632227426639311619351783957077350563223159668112192733747397322031251259906123132225094550626006655753823851757539062126294038391396 3

- p =
  10933766183632575817611517034730668287155799984632223454138745671121273456287670008290843302875521274970245314593222946129064538358581018615539828479146469

- q =
  10910616967349110231723734078614922645337060882141748968209834225138976011179993394299810159736904468554021708289824396553412180514827996444845438176099727

- Secara umum dapat disimpulkan bahwa RSA hanya aman jika *n* cukup besar.

- Jika panjang *n* hanya 256 bit atau kurang, ia dapat difaktorkan dalam beberapa jam saja dengan sebuah komputer *PC* dan program yang tersedia secara bebas.

- Jika panjang *n* adalah 512 bit atau kurang, ia dapat difaktorkan dengan beberapa ratus komputer

- Tahun 1977, 3 orang penemu *RSA* membuat sayembara untuk memecahkan cipherteks dengan menggunakan RSA di majalah *Scientific American*.

- Hadiahnya: $100

- Tahun 1994, kelompok yang bekerja dengan kolaborasi internet berhasil memecahkan cipherteks hanya dalam waktu 8 bulan.

Kelemahan RSA

- *RSA* lebih lambat daripada algoritma kriptografi kunci-simetri seperti *DES* dan *AES*
- Dalam praktek, *RSA* tidak digunakan untuk mengenkripsi pesan, tetapi mengenkripsi kunci simetri (kunci sesi) dengan kunci publik penerima pesan.
- Pesan dienkripsi dengan algoritma simetri seperti DES atau AES.
- Pesan dan kunci simetri dikirim bersamaan.
- Penerima mendekripsi kunci simetri dengan kunci privatnya, lalu mendekripsi pesan dengan kunci simetri tersebut.